

EXERCICE N1 : (QCM)

I/ Soit D une droite et F un point du plan n'appartenant pas à D. On note H le projeté orthogonal de M sur D. L'ensemble Γ des points M du plan tels que $MF=(\ln 2).MH$ est :

- a) une parabole b) une hyperbole c) une ellipse

II/ On donne dans le graphique ci-contre une ellipse \mathcal{E} .

1) L'ellipse \mathcal{E} admet pour équation :

- a) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2) L'un des foyers de l'ellipse \mathcal{E} est le point :

- a) $F(0, \sqrt{5})$ b) $F(\sqrt{13}, 0)$ c) $F(\sqrt{5}, 0)$

3) L'une des directrices de l'ellipse \mathcal{E} est la droite :

- a) $D : y = \frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $D : x = \frac{9}{\sqrt{5}}$ c) $D : x = \frac{4}{\sqrt{5}}$

III/ 1) L'hyperbole \mathcal{H} de centre O, de foyer $F(5,0)$ et de directrice $D : x = \frac{9}{5}$ a pour équation :

- a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2) La courbe d'équation $|x^2 - y^2| = 1$ est :

- a) une hyperbole b) la réunion de deux hyperboles c) la réunion d'une ellipse et d'une hyperbole

3) L'une des directrices de l'hyperbole $\mathcal{H} : -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ est la droite :

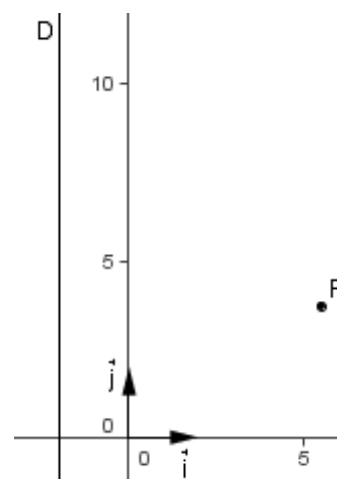
- a) $D : x = \frac{9}{5}$ b) $D : y = \frac{16}{5}$ c) $D : y = \frac{4}{5}$

EXERCICE N2 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Dans la figure ci-contre on désigne par F et par D respectivement le foyer et la directrice d'une parabole P.

- 1) Construire le sommet S de la parabole P.
- 2) Construire le point A de la parabole P d'ordonnée 10.
- 3) Construire le point B intersection de la parabole P et l'axe (O, \vec{i}) .
- 4) Tracer l'allure de la parabole P.



EXERCICE N3 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne les

paraboles P, P' et P'' d'équations respectives : $y^2 = 6x$; $y^2 = -x$ et $x^2 = \frac{1}{2}y$

Déterminer les éléments caractéristiques (paramètre, foyer et directrice) de chacune de ces paraboles

EXERCICE N4 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit la courbe (Γ) dont une équation est : $y^2 + 2y - 4x + 3 = 0$.

Montrer que (Γ) est une parabole dont on précisera les éléments caractéristiques.



EXERCICE N5 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit P la parabole de foyer O et de directrice D d'équation $x = -2$.

- 1) a) Montrer qu'une équation de P est $y^2 = 4x + 4$
b) Tracer la parabole P. On notera S son sommet
- 2) Soit le point $A(-2, \frac{3}{2})$.
 - a) Déterminer, par leurs équations, les tangentes à P issues de A. (On note T et T' ces tangentes, E et E' leurs points de contact respectifs).
 - b) Vérifier que T et T' sont perpendiculaires et que O, E et E' sont alignés.

EXERCICE N6 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la conique (C) d'équation :
 $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$

- 1) Montrer que (C) est une hyperbole dont on précisera le centre Ω , les directrices, les sommets et les asymptotes. Tracer (C).
- 2) Soit les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$
Donner une équation de (C) dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

EXERCICE N7 :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $z' = i.z^2 + 2z$, avec $z = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- 1) Donner la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
- 2) On note (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un réel positif.
 - a) Donner une équation cartésienne de (Γ) .
 - b) Montrer que (Γ) est une partie d'une hyperbole \mathcal{H} qu'on précisera.
- 3) Donner une équation de \mathcal{H} rapportée à ses asymptotes

EXERCICE N8 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer la nature de chacune des courbes suivantes en donnant ses éléments caractéristiques, puis la construire :

- a) $C_1 : x^2 + 4y^2 + 6y = 0$
- b) $C_2 : 4y^2 - 25x^2 + 8y - 96 = 0$
- c) $C_3 : x^2 - y = 3x - 1$

EXERCICE N9 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 1$.

Déterminer les équations des asymptotes de \mathcal{H} et tracer \mathcal{H} .

EXERCICE N10 :

Soit m un paramètre réel. Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe C_m d'équation :

$$mx^2 + (1 + m^2)y^2 - 2my = 0$$

EXERCICE N11 :

Soit (C) la conique d'équation : $2x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

Déterminer les tangentes issues du point A(2,3)



EXERCICE N12 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On donne la courbe \mathcal{H} dont une équation est $x^2 - y^2 + 4x + 2y = 1$.

- 1) Montrer que \mathcal{H} est une hyperbole équilatère dont on précisera l'excentricité, les foyers, les sommets le centre et les directrices.
- 2) Soit les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$
Donner une équation de (C) dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v})$

EXERCICE 13 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Dans chacun des cas suivants identifier l'ensemble \mathcal{C} des points $M(x,y)$ tels que :

- a) $y=2.t^2$ et $x=t$; ($t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)
- b) $x = \frac{2}{\cos \theta}$ et $y=3\tan \theta$; ($\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$)
- c) $x=5\cos \theta$ et $y=3\sin \theta$; ($\theta \in \mathbb{R}$)

EXERCICE 14 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f la similitude directe de centre $A(0,1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

- 1) Déterminer la forme complexe de f .
- 2) Une courbe (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y=0$
 - a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f .
 - b) En déduire que (C') est une parabole que l'on caractérisera. Tracer (C').
- 3) Déterminer alors la nature de la courbe (C).

EXERCICE N15 :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par (C) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $4x|x|+y^2 - 16x-20=0$.

- 1) Montrer que (C) est la réunion d'une partie d'une conique (C_1) et d'une partie d'une conique (C_2) que l'on identifiera.
- 2) Déterminer pour chacune des coniques les éléments caractéristiques.
- 3) Soit A un point où chacune des coniques coupe la droite (O, \vec{j}) .
Montrer que les deux coniques (C_1) et (C_2) ont la même tangente en A.

EXERCICE N16 :

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon $R>1$. A tout point M d'affixe $z=Re^{i\theta}$ du cercle, on associe le point M' d'affixe $\frac{1}{z}$.

- 1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du milieu I de $[MM']$.
- 2) Montrer que I varie sur une ellipse \mathcal{E} lorsque M varie sur (C). Donner les éléments caractéristiques de \mathcal{E} .

EXERCICE N17 :

Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $xy=1$. On désigne par A, B et C les points de \mathcal{H} d'abscisses respectives 1,2 et $-\frac{1}{2}$.



- 1) Montrer que la tangente T à \mathcal{H} en A est perpendiculaire à (BC) .
- 2) On désigne par F le point de \mathcal{H} d'abscisse 3.
 - a) Donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A du triangle ABF .
 - b) Démontrer que l'orthocentre de ABF est un point de \mathcal{H} .

EXERCICE N18 :

- 1) Soit $\mathcal{E} = \{M(x,y) \in P; x^2 + 4y^2 = 1\}$ Donner les éléments caractéristiques de \mathcal{E} .
- 2) Soit D et D' les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=-1$ et $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Soit $M_0(\cos(\theta), \frac{1}{2} \sin(\theta))$ un point de P , avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
 - a) Vérifier que M_0 appartient à \mathcal{E} .
 - b) Ecrire une équation de la tangente T à \mathcal{E} au point M_0 .
 - c) T coupe D et D' respectivement en K et K' .
Montrer que le triangle KFK' est rectangle en F .

EXERCICE N19 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A tout point $M(x,y)$ on associe son affixe $z=x+iy$.

On note P l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation $|\frac{z+i\bar{z}}{2}| = |z - \frac{1+i}{2}|$

- 1) Montrer que P a pour équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
- 2) On pose $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$. Vérifier que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé du plan.
- 3) Déterminer une équation de P dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Quelle est alors la nature de l'ensemble P et quels sont ses éléments caractéristiques.

EXERCICE N20 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit t un paramètre réel strictement positif. On note (Γ_t) l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant :

$$(\ln t)x^2 + y^2 - 2(\ln^2 t)x - 2(\ln t)y + (\ln^3 t) = 0$$

- 1) Reconnaître (Γ_1) . On suppose dans la suite que $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
- 2) a) Discuter suivant le paramètre réel t la nature de l'ensemble (Γ_t) .
b) Pour $t \in]0,1[\cup]1, e^2[$, on note I_t le centre (Γ_t) . Que décrit le point I_t quand t décrit $]0,1[\cup]1, e^2[$.
- 3) a) Déterminer t_0 pour que (Γ_{t_0}) soit un cercle, préciser son centre.
b) Déterminer t_1 pour que (Γ_{t_1}) soit une hyperbole équilatère.

EXERCICE N21 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

- 1) Déterminer la forme complexe de f .
- 2) Une courbe (C) a pour équation $15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy - 768 = 0$
 - a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f .
 - b) En déduire que (C') est une ellipse que l'on caractérisera. Tracer (C') .
- 3) Déterminer alors la nature de la courbe (C) .



EXERCICE N22 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la conique \mathcal{C}

d'équation: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$

- 1) Déterminer la nature de \mathcal{C} et préciser ses foyers, ses sommets. Tracer \mathcal{C} .
- 2) Déterminer les équations des hyperboles de centre O , dont les sommets sont des sommets de \mathcal{C} et les asymptotes sont perpendiculaires. Tracer ces hyperboles.
- 3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{36 - t^2} dt.$
 - a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$.
 - b) Montrer que l'aire de \mathcal{C} en unité d'aires est $\mathcal{A} = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right).$
 - c) En déduire la valeur de \mathcal{A} .

EXERCICE N23 : (Bac 2014)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Déterminer les coordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2x + 4.$

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) l'ellipse (E) et la parabole $(P).$

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 = -2|x| + 4$

a) Vérifier que (O, \vec{j}) est un axe de symétrie de $(\Gamma).$

b) Tracer (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}).$

3) a) Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 4$

Vérifier que pour tout réel t de $[0, 2]$, le point $M(t, \sqrt{4 - t^2})$ appartient à $(C).$

b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4 - t^2} dt.$ Montrer que $I_1 = \pi$

4) Calculer $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t + 4} dt.$

5) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse $(E).$

Exprimer \mathcal{A} en fonction de I_1 et I_2 puis calculer $\mathcal{A}.$

